

20.A

Orientations and
the vanishing theorem

20.3 Orientations and fundamental classes 係数は環 R

$M: n\text{-mfd}$ の 4p-ト $x \in U \cong \mathbb{R}^n$ に対し

$$H_i(M, M-x) \underset{\text{EXC}}{\cong} H_i(U, U-x) \underset{\text{EXA}}{\cong} \widetilde{H}_{i-1}(U-x) \underset{\text{WEQ}}{\cong} \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \underset{i=n \text{ なら}}{\cong} R \underset{\text{一元生成}}{\quad}$$

Def. $M: n\text{-mfd}$. $X \subseteq M$.

◦ $z \in H_n(M, M-X)$ が、任意の $x \in X$ で

$[H_n(M, M-X) \rightarrow H_n(M, M-x)]$ による z の像は生成元を満たすとき、 X における M の fundamental class **基本類** と呼ぶ。

◦ $X = M$ のとき、そのまま **基本類** という。

◦ M の開被覆 $\{U_i\}$ と $\{z_i: U_i \text{ における } M \text{ の基本類}\}$ が

$[U_i \cap U_j \neq \emptyset \text{ なら } z_i \text{ と } z_j \text{ は } H_n(M, M - U_i \cap U_j) \text{ で一致}]$
orientation
 を満たすとき、 M の **R-向き付け** と呼ぶ。

◦ $R = \mathbb{Z}$ のとき、そのまま **向き付け** という。

M の基本類は向き付けを使めるが、cpt なら以下の定理から逆も成立。

Thm. (Vanishing)

$$M: n\text{-mfd. に対し} \quad H_{>n}(M; \pi) = 0.$$

$$\text{さらに連結非cptなら} \quad \widetilde{H}_n(M; \pi) = 0.$$

これは次節で示すので、一旦認める。

Thm. (ori. = fund.) $M: n\text{-mfd}$.

$M \geq K: \text{cpt.}$ なら (1) $H_{>n}(M, M-K; \pi) = 0$.

(1) M の R -向き付けは

K における M の基本類を定める.

特に $M: \text{cpt.}$ なら 0 向き付け = 基本類

prf. $K = \bigcup_{i=1}^{\text{fin}} K_i$: 各々 cpt. , $K_i \subseteq U_i \cong \mathbb{R}^n$ と書き直す. — M の R -向き付けの和を各々の U_i 上で行う.

(base step) 和が n 以下のとき: $K \subseteq U$ において

$$(1) H_{>n}(M, M-K) \underset{\text{EXC}}{=} H_{>n}(U, U-K) \underset{\text{EXA}}{=} \tilde{H}_{\geq n}(U-K) \underset{\text{Van.}}{=} 0$$

(1) M の R -向き付けは、 U のそれから

U における M の基本類 $\in H_n(M, M-U)$ を定め、それは
 K における M の基本類 $\in H_n(M, M-K)$ を定める.

(inductive step) $K, L, K \cap L$ が (1)(1) をみたすとき: $K \cup L$ において

$$\begin{array}{ccc} H_{i+1}(M, M-K \cap L) & \longrightarrow & H_i(M, M-K \cup L) \\ i \geq n & \parallel \text{帰納法の仮定} & \searrow \psi \\ & 0 & \phi \\ & H_i(M, M-K) \oplus H_i(M, M-L) & \longrightarrow H_i(M, M-K \cap L) \end{array} \quad (\text{MTV ex.})$$

(1) $i > n$ 帰納法 || の仮定 (1) より OK.

$$(1) i = n \quad \begin{array}{c} \psi \\ z_K \end{array} \overset{0}{\parallel} \text{帰納法の仮定} \overset{\psi}{z_L} \underset{(1)}{\parallel} \begin{array}{c} \psi \\ z_{K \cap L} \end{array} \longrightarrow z_{K \cap L} - z_{K \cap L} = 0$$

R -orientation

だが、 $\psi: \text{inj.}$ より $\exists! z_{K \cup L} \in H_n(M, M-K \cup L)$,
 $\downarrow \psi$
 $(z_K, z_L).$

□

Cor. M : 連結 cpt n -mfd. ($n > 0$)

いずれか一方が成立する.

◦ M は向き付け不可能,

$$H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$$

◦ M は向き付け可能, $\forall x \in M \rightarrow$

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M, M-x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} : \text{iso.}$$

prf.

◦ $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0 \dots$ 向き付け不可能

◦ $H_n(M; \mathbb{Z}) \neq 0 \dots$

0 : $M-x$ は 連結, non-cpt.

Van. II

$$H_n(M-x; \pi) \rightarrow H_n(M; \pi) \hookrightarrow H_n(M, M-x; \pi) \cong \pi.$$

普遍係数定理 $\uparrow$

$$H_n(M; \mathbb{R}) \otimes \pi$$

$$\begin{cases} R = \mathbb{Z} \\ \pi = \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_n(M, M-x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

一元生成. 生成元 $t \in u$ かつ fix する.

$$t \mapsto q_x \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} R = \mathbb{Z} \\ \pi = \mathbb{F}_p \end{cases}$$

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \hookrightarrow H_n(M, M-x; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p.$$

自然性より、全ての p : 素数 $\rightarrow$ inj. $\neq 1$, $q_x = \pm 1$.

生成元は生成元になる γ . 全射.

□

20.4 The proof of the vanishing theorem

Lem. 1

$$\operatorname{colim}_{\substack{K \subseteq X \\ \text{cpt}}} H_q(K) \longrightarrow H_q(X) : \text{surj.}$$

i.e. 任意の $s \in H_q(X)$ に対して、ある $K \subseteq_{cpt} X$, $t \in H^q(K)$ があつて、 $s \mapsto t$.

prf.

① $Y \xrightarrow[\gamma]{\text{weak eq.}} X : \text{CW approx.}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y) \xrightarrow{\sim} H_q(X) \\
 & & \uparrow \Psi & & \uparrow \textcircled{2} \Psi \\
 & & \sum_{fin} a_j[j] & \xrightarrow{\sim} & s \\
 \textcircled{3} & \begin{array}{c} Y \\ \cup \\ L \end{array} \text{ fin sub cplx} & \uparrow & & \uparrow \\
 U_j = & L & \sum_{fin} a_j[j] & \longrightarrow & t \textcircled{4} \\
 & & \uparrow \Psi & & \uparrow \Psi \\
 & & Z_q(L) & \longrightarrow & H_q(L) \longrightarrow H_q(\gamma(L))
 \end{array}$$

四

Lem. 2 $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$H_{\geq n}(U) = 0$$

prf. $i \geq n$, $s \in H_i(\mathcal{U})$, $\perp$ Lem. 1 $\cap K \subseteq U \ni \exists \bar{s}$.

$$K \subseteq L \subseteq U: \mathbb{R}^n \text{ sub complex } \exists \text{ 取 } \exists. H_q(\mathbb{R}^n) = 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{\cong} & H_{i+1}(\mathbb{R}^n, L) & \xrightarrow{\partial} & H_i(L) \leftarrow H_i(K) \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \therefore \# \text{rel. } (zn+i)\text{-cell.} & & H_{i+1}(\mathbb{R}^n, U) & \xrightarrow{\partial} & H_i(U) \xleftarrow{0}
 \end{array}$$

□

Lem. 3 $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$H_n(\mathbb{R}^n, U) \hookrightarrow \prod_{x \notin U} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) : \text{inj.}$$

i.e. $t \in H_n(\mathbb{R}^n, U)$ かつ、任意の $x \in \mathbb{R}^n - U$ に對し

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \cong \mathbb{Z}, \quad 0 \leq n \leq \infty, \quad t=0.$$

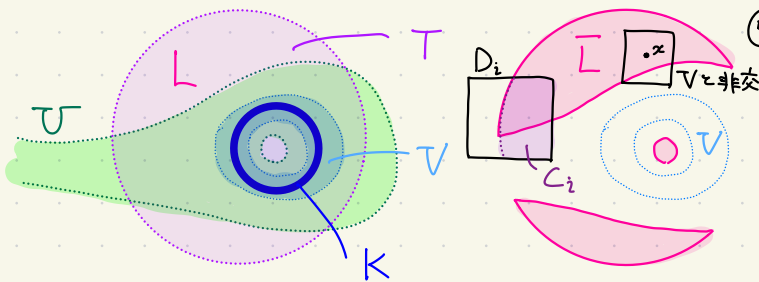
prf. $H_q(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \forall q$ 同値に inj. を示す.

$$\widetilde{H}_{n-1}(U) \rightarrow \prod_{i=1}^n \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x_i\})$$

$\widetilde{H}_{n-1}(K) \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}(V)$
 $\uparrow$
 $\textcircled{4} \exists r \mapsto \textcircled{8} \widetilde{H}_{n-1}(T - \bigcup_{i=1}^N C_i)$
 $\uparrow$
 $\textcircled{5} \xrightarrow{\sim} 0 \textcircled{14}$
 $\uparrow$
 $\textcircled{6} \xrightarrow{\sim} 0$: 假定
 $\uparrow$
 $\textcircled{7} \xrightarrow{\sim} 0$: 假定

Lem. 1

② $\exists J \exists V \text{③}$
cpt: $K \subseteq V$: open

$$\begin{array}{lcl} \overline{T} : \text{cpt} & & \overline{U} : \text{cpt} \\ U \textcircled{5} & \subseteq & T : \text{可分} \\ & & \text{open} \\ & \uparrow & \\ \overline{V} : \text{cpt} & & L := T \setminus U \\ V \textcircled{3} & & \textcircled{6} \\ \textcolor{blue}{V} : \text{open} & & \end{array}$$


⑦。各 $x \in \mathbb{L}$ の開直方体近傍で V と交わらないものを取り.

• $\bigcup_{i=1}^N D_i \geq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$; 有限个的取子.

- $C_i := D_i \cap T$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

$$(\mathbb{R}^n - D_i) \cap T = T - C_i.$$

② $\text{claim}(p) := [\widetilde{H}_{n-1}(T - \bigcup_{i=1}^p C_i) \ni \tilde{r} = 0.]$ ($1 \leq p \leq N$). T : 可移性 $\text{claim}(0)$.

Lem. 2

$$\widetilde{H}_n \left(\left(T - \bigcup_{i=1}^{p-1} C_i \right) \cup \left(\mathbb{R}^n - D_p \right) \right) \stackrel{\text{Lem. 2}}{=} 0 \quad (\text{MTV ex.})$$

$$\rightarrow \widetilde{H}_{n-1}\left(\left(T - \bigcup_{i=1}^{p-1} C_i\right) \cap (\mathbb{R}^n - D_p)\right) \xrightarrow{\oplus} \widetilde{H}_{n-1}\left(T - \bigcup_{i=1}^{p-1} C_i\right) \oplus \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - D_p)$$

$\widetilde{H}_{n-1}(T - \bigcup_{i=1}^p C_i) \cong \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) \cong \mathbb{R}^n - \{x\} \cong D^n \setminus \partial D^n$

□

Lem. 4 $x \in M$: 連結かつ非cpt mfd.

$$H_q(M) \longrightarrow H_q(M, M-x) \text{ は零射.}$$

x チャート有限個で覆い、各々で $\cong$ 区間となるよう道をとり直す。 $(M, M-L) \hookrightarrow (M, M-x)$ のホモトピーを通じてチャートに順に作る。

prf. $s \in H_q(M)$ を取り、

$\tilde{s} \in H_q(K)$: cpt 台に持ち上げる、

$y \in M-K$ と $L: x \rightsquigarrow y$; path を取る。

$$\begin{array}{ccc} H_q(M) & \xrightarrow{s} & H_q(M, M-L) \xrightarrow{w.eq.} H_q(M, M-x) \\ \uparrow \tilde{s} & & \uparrow \\ H_q(K) & \xrightarrow{\tilde{s}} & H_q(M-y, M-y) \end{array}$$

□

Thm. (Vanishing)

M : n -mfd. に対し $H_{>n}(M, \pi) = 0$.

さらに連結非cptなら $\tilde{H}_n(M, \pi) = 0$.

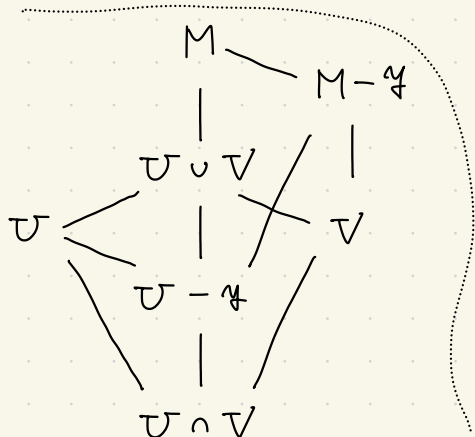
prf. $i \geq n$, $s \in H_i(M, \pi)$ (係数は以降略) を取る。

Lem. 1 s cpt 台に持ち上げ、チャートによる有限被覆に送る。

Lem. 2 よりチャート1枚なら消えるので、以下を示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} H_i(K) & \longrightarrow & H_i(M) \\ \downarrow & & \uparrow s \\ H_i(U_1 \cup \dots \cup U_m) & \xrightarrow{\exists \exists 0} & \end{array}$$

wts. $\begin{cases} U \subseteq M: \text{チャート} \\ V \subseteq M: H_i(V) = 0 \end{cases} \text{ なら } H_i(U \cup V) = 0. \left(\begin{matrix} i > n \\ i = n \text{ if } M: \text{conn., non-cpt} \end{matrix} \right)$



$$H_i(U) \oplus H_i(V) \rightarrow H_i(U \cup V) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(U \cap V) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(U) \oplus \tilde{H}_{i-1}(V)$$

$$\begin{array}{c} \parallel \text{ Lem. 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \text{ 仮定} \\ 0 \end{array}$$

?

$$\begin{array}{c} \parallel \text{ Lem. 2} \\ 0 \end{array}$$

$M \cup V$ ex.

$i > n$ なら

$$\begin{array}{c} \parallel \text{ Lem. 2} \\ 0 \end{array} \text{ より OK.}$$

以下 $i = n$, M : conn, non-cpt だとする。

wts. 「次の射は単射である: $\tilde{H}_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(V)$ 」

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} U \cup V \\ \downarrow \\ U \cap V \end{array} \xrightarrow{\text{EXC}} \tilde{H}_n(M, M-x) \\ \uparrow \tilde{H}_n(U, U-x) \quad \uparrow \tilde{H}_n(M-x, M-x) \\ \tilde{H}_n(U \cup V, U \cap V) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(U \cap V) \\ \uparrow \tilde{H}_n(U, U \cap V) \quad \uparrow \tilde{H}_n(V, U \cap V) \\ \tilde{H}_{n-1}(U) \quad \tilde{H}_{n-1}(V) \end{array}$$

mono? : ex.

$$\begin{array}{c} \textcircled{10} 0 \quad \textcircled{9} 0 \quad \textcircled{8} 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \textcircled{11} 0 \quad \textcircled{7} 0 \quad \textcircled{6} 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ s \quad s' - t' \quad t' \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \textcircled{12} 0 \quad \textcircled{3} 0 \quad \textcircled{2} 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

① 仮定

□